

# 第2章

## 輻射輸送方程式と宇宙メーザー放射

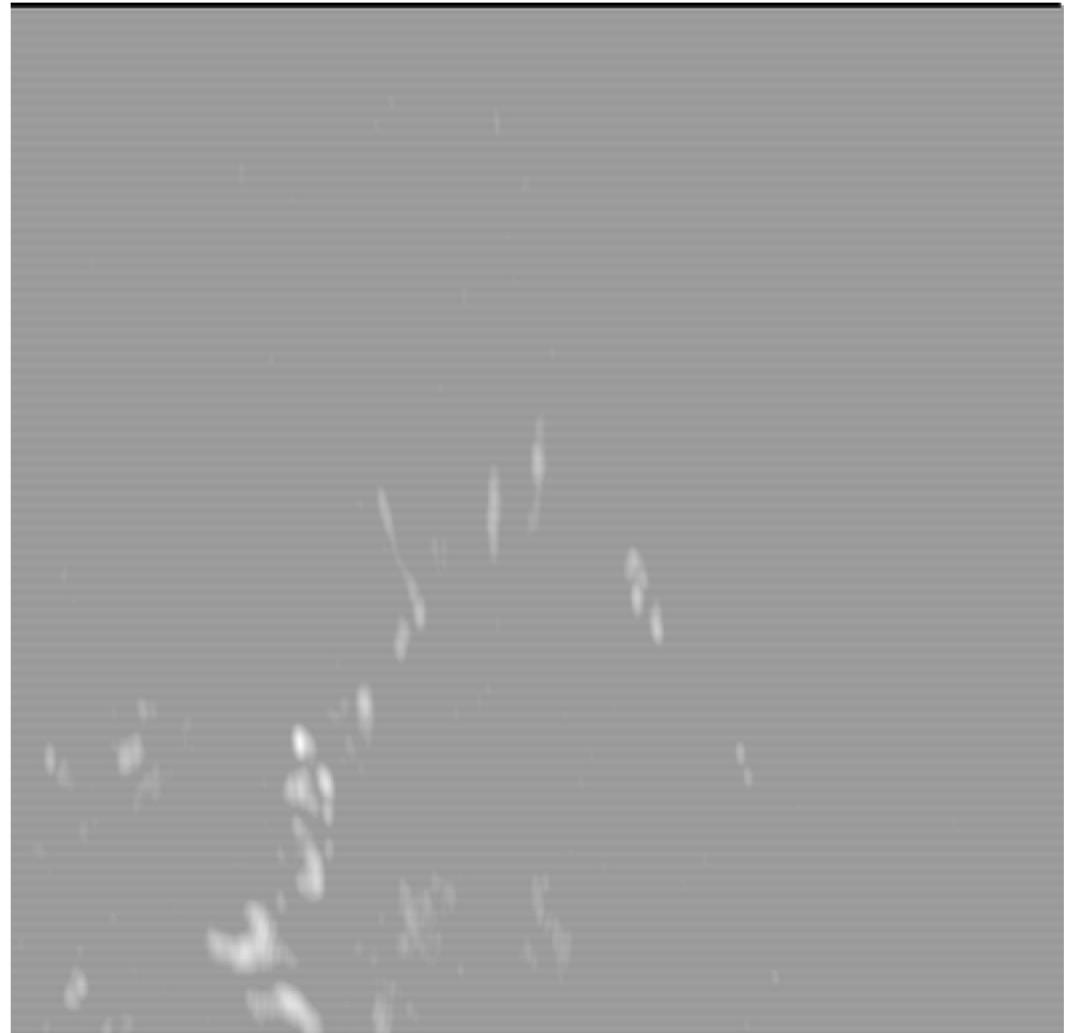
- メーザー理論を避けて通れない理由
- 輻射輸送方程式 (radiative transfer equation) とメーザー
- 状態個数方程式 (population equation) とメーザー

※宇宙メーザーに関するキーワード

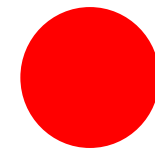
1. 非熱力学的平衡状態 (**non thermodynamical equilibrium**)  
エネルギー状態分布の反転 (**level inversion**)
2. メーザー励起 (**maser excitation**)  
= エネルギー状態分布のくみ上げ (**pumping**)  
+ エネルギー状態密集からの開放 (**decay**)
3. メーザー発光の増幅 (**amplification**) と  
放射方向の絞り込み (**beaming**)

# レーザー理論を避けて通れない理由

- どうしてリング状に見えるの？
- どうして多数スポットが  
見えるの？
- どうして動きが複雑なの？
- 実際のガスの動きは？
- どうしてこの星に(だけ)  
レーザーが見えるの？
- レーザー発光するこの星の 正  
体(=内部構造)は？
- この星は(数億年前に)何処で  
どうやって生まれたの？
- この星が生まれた頃の  
宇宙の様子は？



SiO masers  
in TX Cam

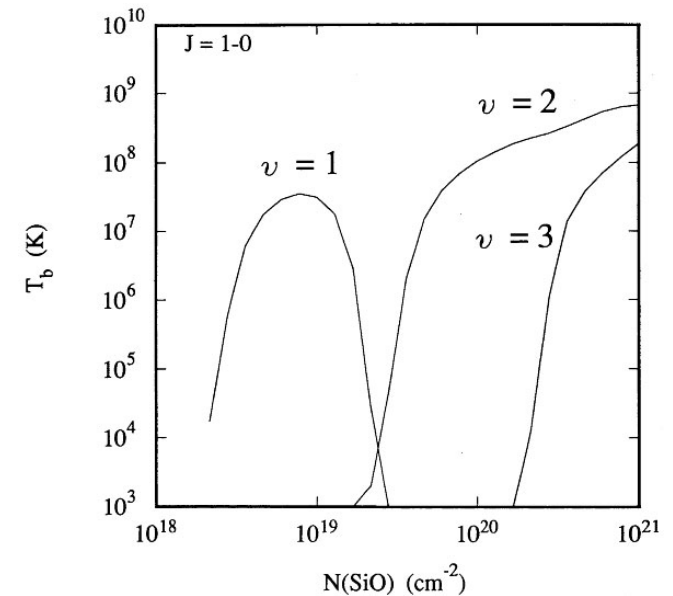
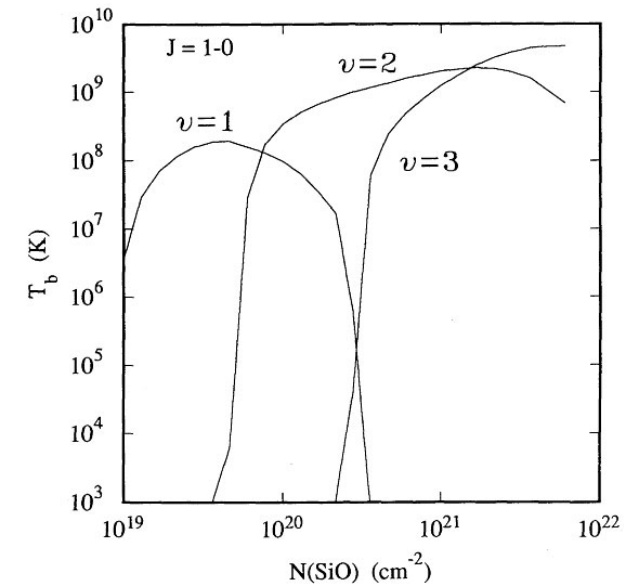


赤色超巨星  
光球サイズ

(Diamond & Kemball 2003)

# メーザー理論を避けて通れない理由

- 予想も立てずに観測すること＝「無謀」
  - 「予想を立てる」＝「モデルを立てる」
  - 立てたモデルから、実際にどのように観測されるのか予想する
  - 「実際の現象」＝「モデルで再現される現象」
    - ⇒ その現象が起きていると推定できる
    - ⇒ **新しく仮説に基づく場合＝新発見**
    - ※できるだけ正確なモデルであるほど高確率
    - ※観測量を予言できればより注目される
  - 「実際の現象」≠「モデルで再現される現象」
    - ⇒ その現象は起っていないことになる
    - ⇒ **他の可能性を絞る込むことができない**  
(できれば最初からできていた)
    - ⇒ **観測データだけが残る**
- 「面白い！」と思う人(＝面白いモデルを立てる)が出現しなければゴミと化す



SiO maser model  
(Lockett & Elitzur 1992)

# 熱力学的平衡 (thermodynamical equilibrium)

熱力学的物理量(温度・エネルギー)が一定量に保たれる状態

- エネルギー収支がゼロの状態
- エネルギーの注入⇨速やかなエネルギーの開放／元の状態へ

## 熱化(thermalization)

- 物体(流体)中でのエネルギー(熱)伝達の方法
  1. 原子／分子間の衝突 (固体 >> 液体 >> 気体)
  2. 対流(液体 >> 気体) ※一種の運動エネルギーによるE運搬
  3. 電磁波の放射／吸収  
※エネルギー伝達の媒体は光子／電磁波
- 気体における理想的な熱力学的状態: **黒体 (black body)**
  - 熱収支がない
  - ⇨ E放射がないのだからその物体は真っ黒に見えるはず
  - 上記1,3が瞬時に行われる⇨ 十分な数の粒子数と光子数
  - 粒子状態数はボルツマン分布になっているはず
  - 電磁波放射強度分布はプランク関数に従っているはず



# 統計熱力学を思い出そう

- 気体中の粒子は様々なエネルギーを持つ
- ボルツマン分布 (Boltzmann distribution)

$$\frac{n_1}{N} = g_1 e^{-\frac{E}{kT}}, \quad N = \sum_i n_i, \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \leq 1, \quad \Delta E = E_1 - E_2 \geq 0$$

- プランク関数 (Planck function)

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1}$$

- レイリー・ジーンズ近似 (Raileigh-Jeans approximation)

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2kcT}{\lambda^4} \text{ for } hc/k\lambda T \text{ (} h\nu/kT \text{)} \ll 1$$

- ウィーン近似 (Wien approximation)

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/k\lambda T} \text{ for } hc/k\lambda T \text{ (} h\nu/kT \text{)} \gg 1$$

ウィーン近似の式から  
ウィーンの変位則を  
導出しなさい

# 線スペクトルへの道： 量子力学と分光学を思い出そう

- エネルギー状態の離散化：エネルギー準位

$$\Delta E = h\nu$$

- 電磁波の放出：より低いエネルギー準位へ
- 電磁波の吸収：より高いエネルギー準位へ

- 電子励起状態

- $n$ 小：赤外線よりも短波長
- $n$ 大：再結合線

$$\Delta E = h\nu = hcR \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$
$$n, m = 1, 2, 3, \dots \quad n < m$$

$R$ : Rydberg constant

- 分子の振動励起状態間の遷移：赤外線放射

主に分子中原子間距離の伸縮のモード

- 分子の回転励起状態間の遷移：電波放射

- 分子回転軸の取り方により  
様々なモードがある

$$E_{rot} = hBJ(J+1), \quad B = \frac{h}{8\pi^2 I}$$

$$\Delta E = \begin{cases} 2h(J+1)B & \text{for}(J \leftrightarrow J+1) \\ 2hJB & \text{for}(J \leftrightarrow J-1) \end{cases}$$

2原子分子の場合

( $J$ : 回転量子数,  $I$ : 慣性モーメント)

# 分光学的に見た熱力学的平衡

- 統計学的平衡 (statistical equilibrium)  $\frac{dn_i}{dt} = 0, i = 1, 2, 3, \dots$   
各エネルギー準位中の粒子数の増減が常にゼロになる
- 観測される天体放射：  
輻射輸達方程式 (radiative transfer equation) から導出

## ※理想的熱力学的平衡における矛盾

エネルギー収支がゼロ

⇔ (閉鎖系から開放される) 放射が観測される

我々が観測できる電磁波を放つ天体は

必ず熱源 (エネルギー注入源) を伴う

星間分子雲を光らせる熱源は？

# 局所熱力学的平衡

(local thermodynamical equilibrium, LTE)

- 基本的には黒体と同じだと近似する
  - 黒体表面からエネルギーがしみ出している
  - エネルギー支出はごくわずか
- ⇒ (局所的には) 熱力学的平衡が維持されると近似できる
- 長期間安定して存在するはず

LTE状態にあるとみなせる  
天体を挙げなさい

# 星間雲はLTE状態と言える？

- 希薄な粒子密度
  - $n_H = 1^0 - 10^{10} \text{ cm}^{-3} \ll N_A$  (アボガドロ数)  $= 6.02 \times 10^{23}$
  - エネルギーのやりとりがのろい  $t \sim 10^4 \text{ years}$
  - 影響も受けにくいが反応も鈍い
- 広大な星間空間
  - 分子雲  $R \sim 1 \text{ pc} = 3 \times 10^{16} \text{ m}$ ,  $M \sim 100 M_{\text{sun}} = 2 \times 10^{32} \text{ kg}$
  - 分子雲全体で見た場合はLTEとみなせる場合がある

# 復習：放射輸達方程式

## 1. 天体放射の巨視的描像

$$dl_\nu = \varepsilon_\nu dl - l_\nu \kappa_\nu dl$$

$$\frac{dl_\nu}{dl} = \varepsilon_\nu - l_\nu \kappa_\nu$$

$$d\tau_\nu = -\kappa_\nu dl$$

$$\frac{dl_\nu}{d\tau_\nu} = -\frac{\varepsilon_\nu}{\kappa_\nu} + l_\nu = -S_\nu + l_\nu$$

$\varepsilon_\nu$ : (自然)発光係数 (emission coefficient)

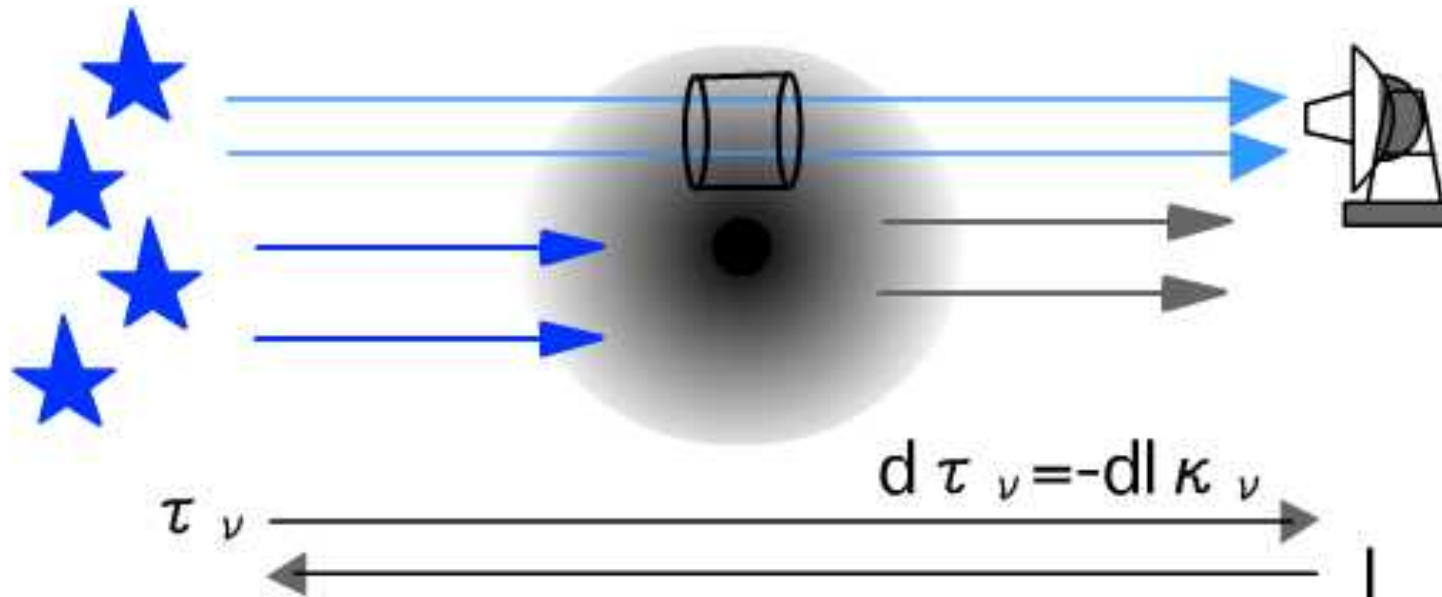
$\kappa_\nu$ : 吸収係数 (absorption coefficient)

$\tau_\nu$ : 光学的厚み (optical thickness)

$S_\nu$ : 源泉関数 (source function)

黒体輻射天体:

$$S_\nu = B_\nu(T) \text{ (プランク関数)}$$



# 放射体と放射強度

吸収係数一定・放射体一様分布の場合の方程式解

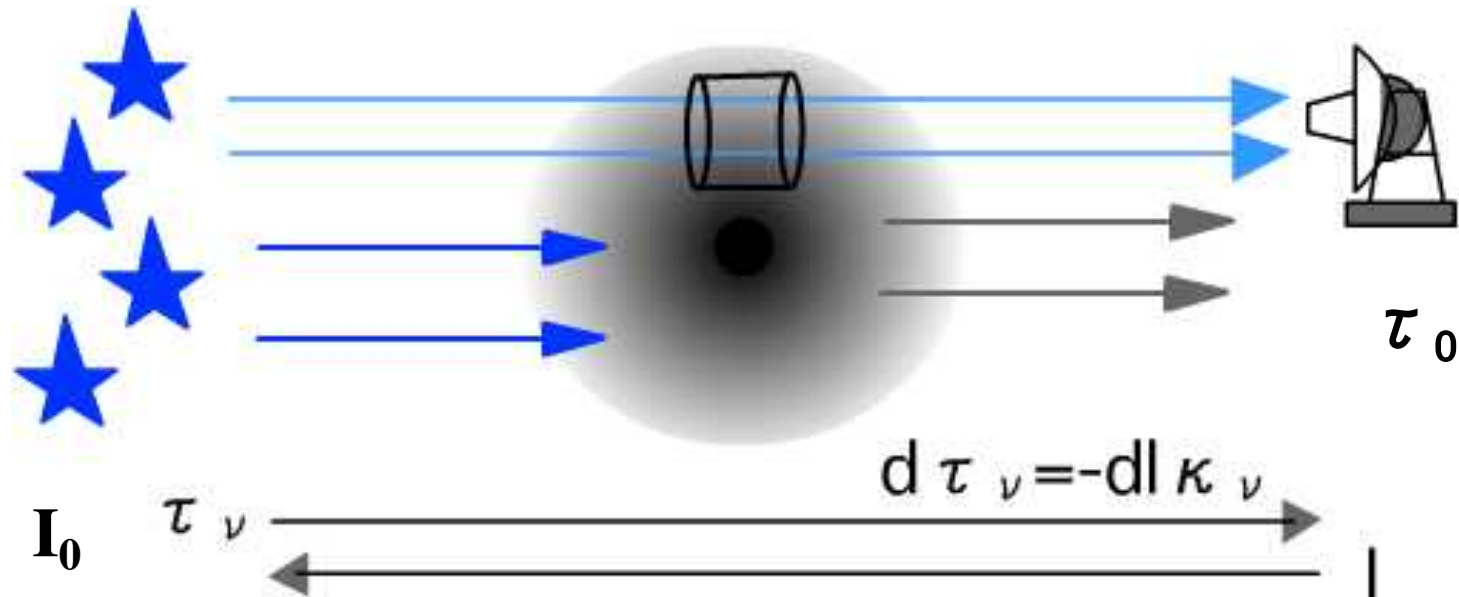
$$I_\nu(\tau_\nu) = I_0 e^{-\tau_\nu} + S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu}) \quad I_0: \text{背景放射強度} [I_\nu (\neq 0)]$$

解の確認:

$$I_\nu = I_0 @ \tau_\nu = 0 \text{ (背景光源の場所)}$$

$$I_\nu = I_0 e^{-\tau_0} + S_\nu (1 - e^{-\tau_0}) @ \tau_\nu = \tau_0 \text{ (観測者の場所)}$$

$$I_\nu(\tau_\nu) \approx I_0(1 - \tau_\nu) + S_\nu \tau_\nu \quad \text{for } \tau_\nu \ll 1$$



# 復習：放射輸達方程式

## 2. 天体放射の微視的描像

各エネルギー準位中の粒子数の時間遷移

### population equation

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -(A_{ij} + C_{ij} + I_\nu B_{ij})n_i + (C_{ji} + I_\nu B_{ji})n_j + P_i - \Gamma_i n_i$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = (-A_{ij} + C_{ij} + I_\nu B_{ij})n_i - (C_{ji} + I_\nu B_{ji})n_j + P_j - \Gamma_j n_j$$

$$A_{ji} = -A_{ij}$$

(上位から下位への  
自然放射粒子の移動)

アインシュタイン係数 (Einstein coefficient)

$A_{12}$ : 自然発光

(spontaneous emission)

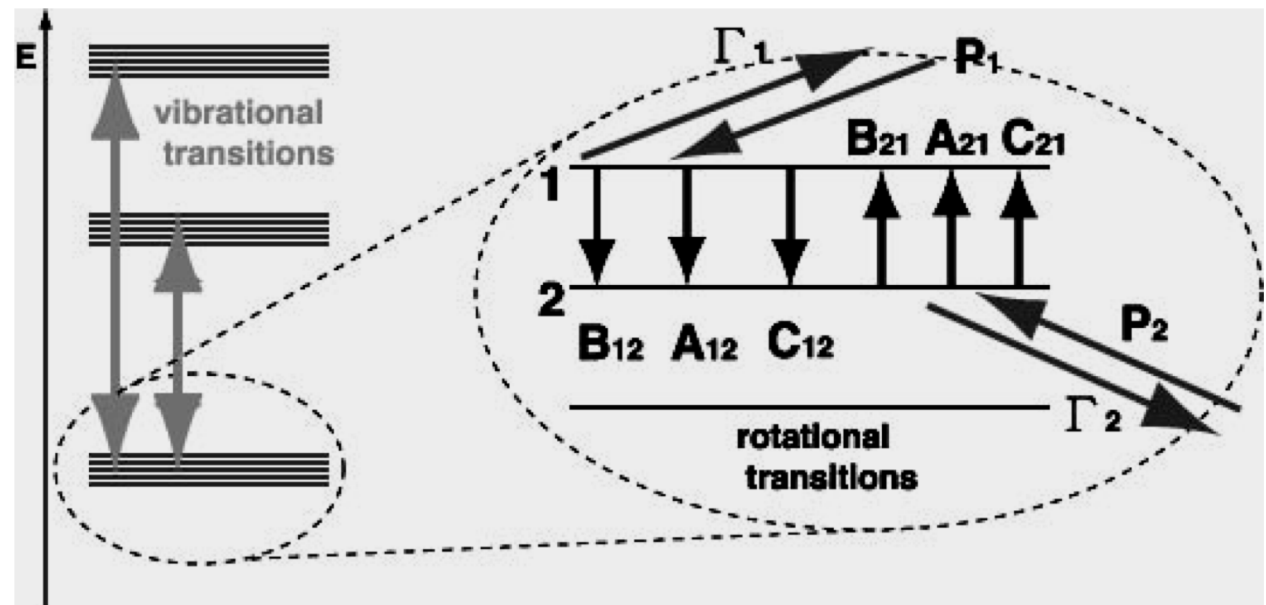
$B_{21}$ : 吸収 (absorption)

$B_{12}$ : 誘導発光

(stimulated emission)

$C$ : 衝突

$P, \Gamma$ : 他のエネルギー準位粒子とのやりとり





# 巨視的描像=微視的描像

- どんな系でもA, B係数は不変
- 閉鎖系:  $I_\nu = S_\nu, P_i = 0, \Gamma_i = 0$
- 熱力学的平衡&統計的平衡

## ボルツマン分布

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{-\frac{\Delta E}{kT}} = \frac{g_1}{g_2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \quad g_i: \text{degeneracy deg}$$

$T = T_{ex}$ : **excitation temperature**

- 状況1: 光子による相互作用のみ、  
エネルギーレベルは2つのみ

$$C_{ij} = 0$$

I

$$0 = -(A_{12} + I_\nu B_{12})n_1 + I_\nu B_{21}n_2, \quad I_\nu (B_{21}n_2 - B_{12}n_1) = A_{12}n_1$$

$$I_\nu (B_{21} \frac{n_2}{n_1} - B_{12}) = I_\nu B_{12} \left( \frac{B_{21} g_2}{B_{12} g_1} e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right) = A_{12}$$

$$\text{when } \frac{B_{21} g_2}{B_{12} g_1} = 1, \quad \frac{h\nu}{kT} \ll 1, \quad I_\nu \approx \frac{A_{12} kT}{B_{12} h\nu} = \frac{2k\nu^2 T}{c^2}, \quad \frac{A_{12}}{B_{12}} = \frac{2h\nu^3}{c^2}$$

下記にある  
アインシュタイン係数  
同士の関係を  
自力で導出しなさい

$$S_\nu = B_\nu (\text{Plank's function}), \quad \frac{dn_i}{dt} = 0$$

# 分子間衝突(collision)と放射

- 状況2: 分子間衝突のみ

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = n_2 C_{21} = \frac{\partial n_2}{\partial t} = n_1 C_{12}, \quad n_1 C_{12} = n_2 C_{21}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp^{-\frac{\Delta E}{kT}}, \quad g_1 C_{12} = g_2 C_{21} \exp^{-\frac{\Delta E}{kT}}$$

異種分子(主に水素)が混じっていても成立

- 状況3: 分子間衝突と自然放射のみ、エネルギーレベルは2つのみ

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\frac{\partial n_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{C_{12}}{C_{21} + A_{21}}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\frac{\partial n_2}{\partial t} = (-A_{21} + C_{12})n_1 + C_{21}n_2, \quad \frac{\partial N_s}{\partial t} = 0, \quad \text{where } N_s = n_1 + n_2$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{C_{12}}{C_{21} + A_{21}} \frac{1}{1 + A_{21}/C_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \exp^{-\frac{\Delta E}{kT}} \frac{1}{1 + N_{cr}/N} \quad \text{where } \frac{N_{cr}}{N} = \frac{A_{21}}{C_{21}}$$

衝突が生じる確率は $N$ (系中の総粒子数)に比例

$N_{cr}$ : 臨界密度(critical density)

※宇宙空間では $N_{cr} \cong N_H$

$N_s \gg N_{cr}$  の場合: 本来あるべき分布(=ボルツマン分布)に近づく (つまり熱化される) = 常に放射が観測される

# レーザー発光＝非LTE状態のたまたもの

- ボルツマン分布からのずれ
  - あるエネルギー順位への僅かながらの過剰な粒子供給
  - エネルギー状態分布の上下反転 (**level inversion**)
  - 緩和(熱化)されずその反転状態がある期間維持される
  - **レーザー放射>>ボルツマン分布から期待される熱的放射**

- 実際の星間ガス

- 閉鎖系ではない
- 2-3レベル系ではレーザーは説明できない

2エネルギーレベル系ではレーザーを説明できない理由は？

エネルギー供給源＋エネルギー開放源＝熱浴 (**heat bath**)

- 確率は地球上よりずっと小さいが、  
**水素原子／分子との間の衝突はある**
- 宇宙空間 (~3K) もまた熱浴とみなせる

# 状態個数方程式からメーザーを理解する

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} &= -(A_{ij} + C_{ij} + I_\nu B_{ij})n_i + (C_{ji} + I_\nu B_{ji})n_j + P_i - \Gamma_i n_i \\ &= P_j - \Gamma_j n_j - A_{ij} n_i - I_\nu (B_{ji} n_j - B_{ij} n_i) - (C_{ji} n_j - C_{ij} n_i) \end{aligned}$$

$$(g_i = g_j)$$

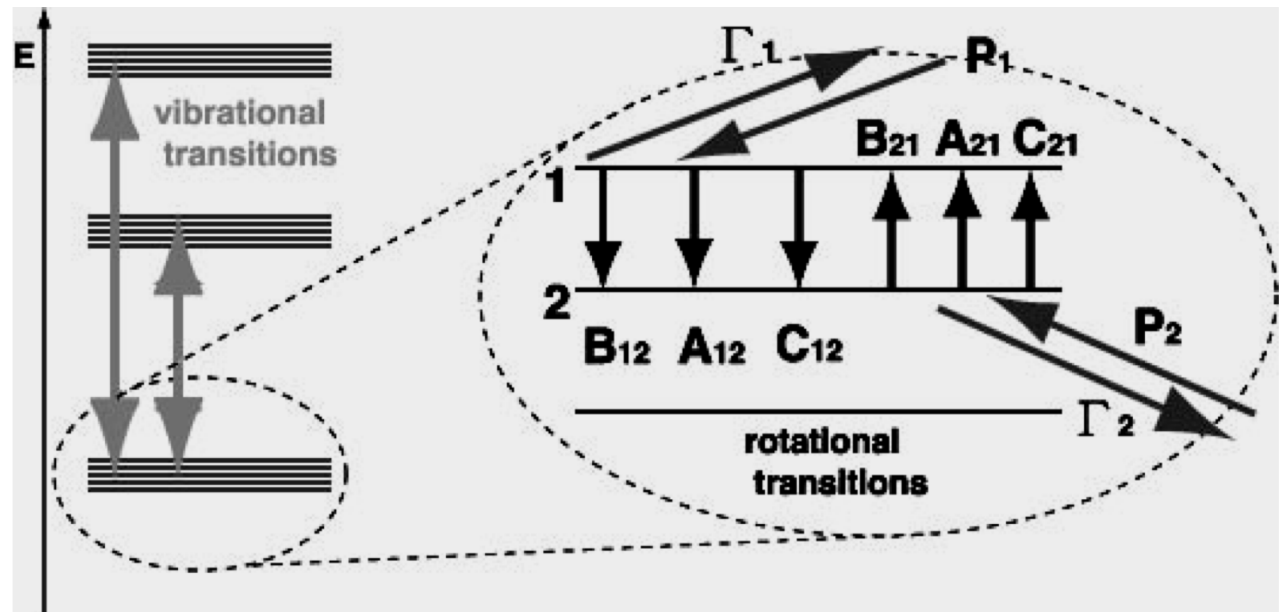
## 平衡状態

$$0 = P_j - \Gamma n_j - A_{ij} n_i - I_\nu (B_{ji} n_j - B_{ij} n_i) - C_{ji} [n_j - n_i \exp(-\Delta E / kT)]$$

$$0 = P_i - \Gamma n_i - A_{ji} n_j + I_\nu (B_{ji} n_j - B_{ij} n_i) + C_{ji} [n_j - n_i \exp(-\Delta E / kT)]$$

$$\Gamma_i \approx \Gamma_j \equiv \Gamma$$

想定している loss rate  
に関わる放射は赤外線  
( $\Delta E$ がメーザー放射の $h\nu$   
よりずっと大きい)



# 状態個数方程式に見るEレベル分布の反転

$$A_{ij}, A_{ji} \ll \Gamma \text{ and } C_{ij}, C_{ji} \ll \Gamma$$

$$n_i + n_j \equiv n\phi(\nu) \text{ where } \phi = (P_i + P_j)/\Gamma$$

**Profile function**  $\phi(\nu) = (\pi^{1/2} \Delta\nu_D)^{-1} \exp\left\{-\left[(\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D\right]^2\right\}$

$$\Delta n = n_j - n_i = \frac{\Delta n_0}{1 + I_\nu/I_s} \phi(\nu) \text{ where } \Delta n_0 = \Delta P/\Gamma, \Delta P = P_j - P_i$$

**Saturation intensity scale**  $I_s = \Gamma/2B_{ji}$

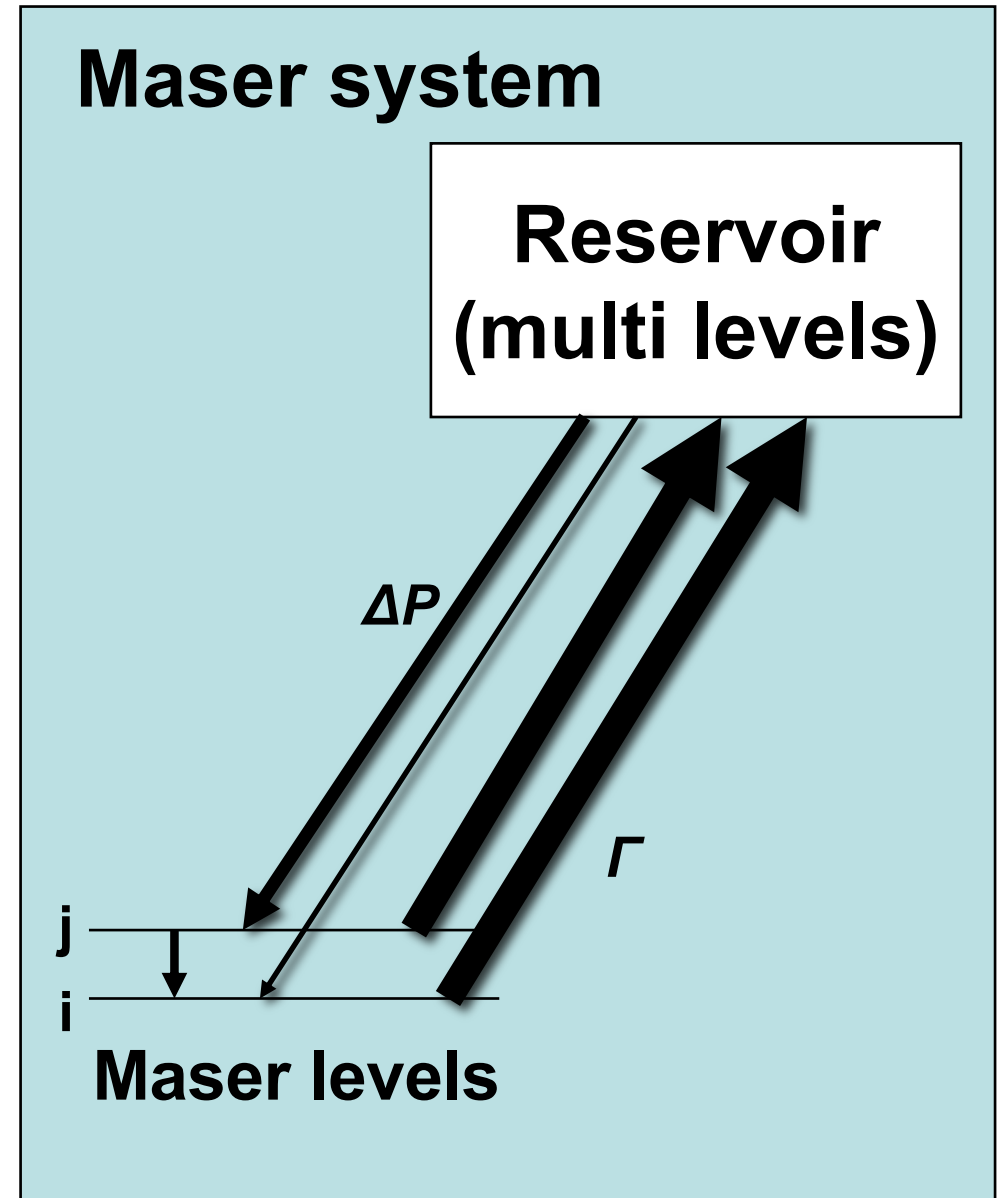
**Inversion process efficiency**  $\eta = \frac{\Delta P}{P_j + P_i} = \frac{\Delta n_0}{n}$

- $\Delta P > 0$  でレベル分布反転
- $I_\nu \gg I_s$  では熱化されてレベル分布反転解消

上記青枠の式を導出しなさい

# Reservoir (heat bath)

- メーザーレベルでの 粒子状態数はreservoir (水槽)の性質で決まる。
- 与えられた粒子状態数 (+ 輻射場)によってメーザー強度が計算される
- 前提:  
メーザー放射によってreservoirの性質は影響を受けない



# メーザー強度をどうやって計算するの？

- より正確なpopulation equation: 三次元的に扱う

**Angle averaged intensity**

$\Delta\Omega$ : maser beam solid angle

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega \approx \frac{\Delta\Omega}{4\pi} I_\nu, \quad \bar{J} = \int J_\nu \phi(\nu) d\nu$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = P_j - \Gamma_j n_j - A_{ij} n_i - J_\nu (B_{ji} n_j - B_{ij} n_i) - (C_{ji} n_j - C_{ij} n_i)$$

天体表面から我々に向かって来る放射 $I_\nu$ を知りたい

(背景放射がない場合)  $\uparrow$

Source function  $S_\nu = \varepsilon_\nu / \kappa_\nu$ と光学的厚みを把握したい

$$dl_\nu = \varepsilon_\nu dl = dl n_j A_{ji} h\nu \phi_j(\nu) / 4\pi$$

$$-dl_\nu = \kappa_\nu I_\nu dl = dl B_{ij} I_\nu n_i h\nu \phi_i(\nu) / 4\pi - dl B_{ji} I_\nu n_j h\nu \phi_j(\nu) / 4\pi$$

$$\approx dl B_{ji} I_\nu \Delta n h\nu \phi(\nu) / 4\pi \quad (\phi_i \approx \phi_j \approx \phi, B_{ij} \approx B_{ji}, C_{ij} \ll B_{ij} J_\nu)$$

$$S_\nu \approx \frac{n_j}{\Delta n} \frac{A_{ji}}{B_{ji}} \quad \Delta n = \frac{\Delta n_0}{1 + J_\nu / J_s} \phi(\nu)$$

$$\Delta n_0 = \Delta P / \Gamma, \quad J_s = \Gamma / B_{ji}$$

これらを同時に解く!?

# Escape probability method

- Radiative transfer eq. を population eq. から分離する  
V.V. Sobolev (1958) が導入

- **Escape probability  $\beta$** : 光子がガス雲から逃げ出す確率の指標

$\bar{J} = S(1 - \beta)$  完全に光学的に厚い場合:  $\beta \approx 0, \bar{J} \approx S$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = -n_j A_{ji} - \bar{J}(n_j B_{ji} - n_i B_{ij}), \quad S_\nu = \frac{A_{ji}}{B_{ji}} \frac{1}{n_i/n_j - 1} \quad \therefore \frac{\partial n_j}{\partial t} = -\beta_{ji} A_{ji} n_j$$

- 観測される放射強度: radiative transfer eq. より

$$F_\nu = \int I_\nu \cos\theta d\Omega, \quad \frac{dI_\nu}{dl} = \frac{\nabla \cdot F_\nu}{4\pi}, \quad \nabla \cdot F_\nu = 4\pi\kappa_\nu (S_\nu - J_\nu)$$

$$L_\nu = \int \nabla \cdot F_\nu dS = 4\pi \int \varepsilon_\nu \beta dV \quad (\text{天体表面で面積分})$$

上記青枠の式を導出しなさい

下式で極限状態を調べなさい

- **Escape factor**  $\langle \beta \rangle = \langle \exp(-\tau) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \exp(-\tau') d\tau' = \frac{1 - \exp(-\tau)}{\tau}$



# Large velocity gradient (LVG)近似

- 任意の場所からの放射は吸収されずに外へ抜けられる

- Sobolev length  $s$ :**

$$|v_z(P') - v_z(P)| < \Delta v_D \text{ in } [z-s, z]$$

$$s \frac{\partial v_z}{\partial z} = \Delta v_D$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{v}{r} \sin^2 \theta + \frac{dv}{dr} \cos^2 \theta$$

$$z = r\mu \quad \text{where } \mu \equiv \cos \theta$$

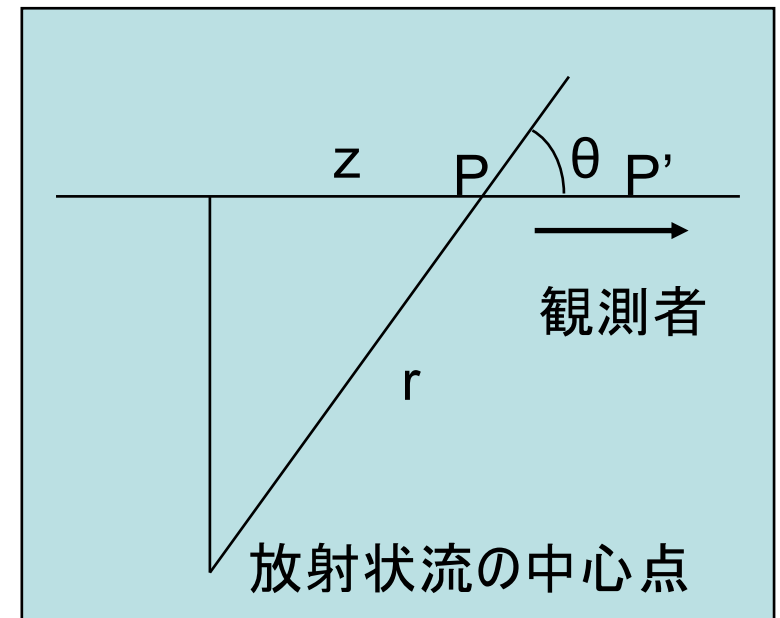
$$v_z(P) = \mu v(r)$$

- Logarithmic velocity gradient**

$$\varepsilon_r \equiv \frac{\partial \ln v}{\partial \ln r} = \frac{r}{v} \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$s = \frac{\Delta v_D / v}{1 - \mu^2 (1 - \varepsilon_r)} r$$

上記赤枠の式を導出しなさい



# LVG近似下の放射強度

$$I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu}) = S_\nu [1 - \exp(-\kappa_\nu s)] \quad \bar{J} \equiv S(1 - \langle \beta \rangle)$$

$$\langle \beta \rangle = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int_0^s \exp(-\kappa l) \frac{dl}{s} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1 - \exp[-\tau(\mu)]}{\tau(\mu)}, \quad \tau(\mu) \equiv \kappa s$$

$$\tau(\mu) = -\frac{hcr}{4\pi\nu} B_{ji} \Delta n [1 - \mu^2(1 - \epsilon_r)]^{-1} \quad \Delta n < 0 \text{ for thermal emission}$$

## レポートその1:

様々な $\epsilon_r$ について $\tau(\mu)$ を計算し、 $\mu$ の関数として図示しなさい。

## レポートその2:

放射状に質量放出する恒星から観測されるメーザーの強度が近似的に $\tau(\mu)$ に比例すると考えた時、SiOメーザースポット群( $\epsilon_r$ 大)やOHメーザースポット群( $\epsilon_r$ 小)の見え方について考察しなさい。

# レーザー増幅

$\kappa$ や $\tau$ は負の値をとるが符号は無視する

$$\kappa_v = B_{ji} \Delta n h \nu \phi(\nu) / 4\pi = \frac{\kappa_{0v}}{1 + J_v / J_s} \quad \text{where } \kappa_{0v} = B_{ji} \Delta n_0 h \nu \phi(\nu) / 4\pi$$

## Conversion efficiency factor

$$e_v \equiv \frac{J_v}{J_v + J_s}, \quad \kappa_v = \kappa_{0v} \frac{J_s}{J_v} e_v$$

- $J_v \ll J_s$  or  $e_v \approx J_v / J_s$ : **不飽和 (unsaturated) レーザー**  
 $\kappa_v \approx \kappa_{0v}$ :  $\kappa_v$ は $J_v$ に支配されない
- $J_v \gg J_s$  or  $e_v \approx 1$ : **飽和 (saturated) レーザー**  
 $\kappa_v \approx J_s \kappa_{0v} / J_v$ :  $\kappa_v$ は $J_v$ に反比例

$$S_v \approx \frac{n_j A_{ji}}{\Delta n B_{ji}}, \quad S_0 = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1+\eta}{2\eta} \quad \eta: \text{population inversion efficiency}$$

$S_0$ が満たす条件  $I_v = (S_0 + I_e) \exp(\kappa_{0v} l) - S_0$   $I_e$ : external input

$I_e = 0$ の場合  $I_v(\tau_v) = \frac{\varepsilon_v}{\kappa_v} [1 - \exp(-\kappa_v s)] = \varepsilon_v l \frac{\exp \tau_v - 1}{\tau_v} \propto \boxed{\exp \tau_v}$

# 飽和(saturation)状態のメーザー

$$I_\nu \kappa_\nu (\text{maser}) \Rightarrow B_{ji} I_\nu \Delta n h \nu \phi(\nu) / 4\pi = B_{ji} J_\nu \Delta n h \nu \phi(\nu) = h \nu \Phi_\nu e_\nu$$

$$\Phi_\nu = B_{ji} J_S \Delta n_0 \phi(\nu) = \frac{\Delta P}{2} = \eta P, \quad \text{where } P = \frac{P_i + P_j}{2}$$

$$\begin{aligned} L_\nu (\text{maser}) &\Rightarrow \int F_\nu dA = \int \nabla \cdot F_\nu dV = h \nu \int \Phi_\nu e_\nu dV \\ &= \eta h \nu P V \phi(\nu) = 4\pi \kappa_{0\nu} J_S V \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot F_\nu = h \nu \Phi_\nu e_\nu \quad \text{強度は増幅長に比例して大きくなる}$$

飽和メーザーでは、どんな状態数くみ上げにおいても  
くみ上げの仕方にも依存する効率をもって  
メーザー光子を作り出す。



メーザー強度はreservoirの  
状態数くみ上げ効率にも依存する

# Conversion efficiency factorのもう1つの意味

- Conversion efficiency factor:  $e_\nu \equiv \frac{J_\nu}{J_\nu + J_s}$ ,  $\kappa_\nu = \kappa_{0\nu} \frac{J_s}{J_\nu} e_\nu$
- Saturation intensity scale:  $I_s = \Gamma / 2B_{ji}$

$$e_\nu \equiv \frac{2BJ_\nu}{\Gamma + 2BJ_\nu}, \quad \Gamma: \text{rate of population loss from the mase}$$

$$\Delta n = n_j - n_i = \frac{\Delta n_0}{1 + I_\nu / I_s} \phi(\nu) \approx \frac{J_s}{J_\nu} e_\nu \phi(\nu) \Delta n_0$$

$$\text{where } \Delta n_0 = \Delta P / \Gamma, \quad \Delta P = P_j - P_i$$

- Saturation ( $e_\nu \sim 1$ ): maser systemから逃げられない  
下方遷移した粒子が再び吸収されて上方遷移してしまう

# メーザー増幅のスケール

- Thermal emission:  $I_\nu \sim S_\nu$
- Maser emission:  $I_\nu \gg S_\nu$

$$\gamma \equiv J_s / S_0 = \left( \frac{\Gamma}{2B_{ij}} \right) / \left( \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1+\eta}{2\eta} \right) \left( A_{ij} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{ij} \right)$$

$$\gamma \approx \eta \Gamma / A_{21}$$

$$\Gamma \sim 10^{-10} N \text{ s}^{-1}, \quad N \sim 10^6 \text{ (for OH)} - 10^{10} \text{ (for H}_2\text{O, SiO) cm}^{-3}$$

$$\eta \sim 0.01$$

$\gamma > 10^5$  ( $\ln \gamma > 11$ ) 程度で飽和するはず

# レーザー放射に対する 一般的な輻射輸送方程式

$$\frac{dl_{\nu}}{dl} = -\kappa_{\nu} I_{\nu} + \epsilon_{\nu}, \quad \kappa_{\nu} = \frac{\kappa_{0\nu}}{1 + J_{\nu}/J_s}$$

$$\frac{dl_{\nu}}{\kappa_{0\nu} dl} = \frac{dl_{\nu}}{d\tau_0} = \frac{I_{\nu}}{1 + J_{\nu}/J_s} + S_m \quad \text{where } S_m = \frac{\epsilon_{\nu}}{\kappa_{0\nu}} \quad (\kappa_{0\nu} \text{ is negative})$$

源泉関数  $S_m$  を無視できるものとし、不飽和レーザー ( $J_{\nu} \ll J_s$ ) 及び飽和レーザー ( $J_{\nu} \gg J_s$ ) の場合の強度  $I_{\nu}$  を求め、利得(今の場合  $\tau_0$ ) に対してどのように増幅されるのか考察しなさい。

ただし、飽和レーザーの場合は  $I_{\nu}$  を  $J_{\nu}$  にそのまま置き換えて考えて良い。

# レーザー放射の線幅

- 周波数毎に吸収係数(≈利得)が異なる(輝線中心周波数で最大)

例: ガウス型強度プロファイル

$$I_\nu = I_0' \phi(\nu) = I_0 \exp(-x^2/\delta_0^2), \quad x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}, \quad \delta_0 = \Delta\nu_0/\Delta\nu_D$$

吸収係数の"profile function"  $\tau_\nu = \kappa_\nu l = \tau_0 \exp(-x^2)$

熱的輝線の場合: ガウス型のまま

$$I_\nu(\tau_\nu) \approx I_\nu(\tau_\nu = 0) \tau_\nu \quad (\text{optically thin}) \quad \& \quad \text{or} \quad (\text{optically thick})$$

不飽和レーザーの場合

$$I_\nu(\tau_\nu) \propto I_\nu(\tau_\nu = 0) \exp(\tau_\nu) = I_0 \exp\left[-x^2/\delta_0^2 - \tau_0 \exp(-x^2)\right]$$

$$I_\nu(\tau_\nu) \approx I_0 \exp(\tau_0) \exp\left[-x^2\left(1/\delta_0^2 + \tau_0\right)\right]$$



# Line narrowing

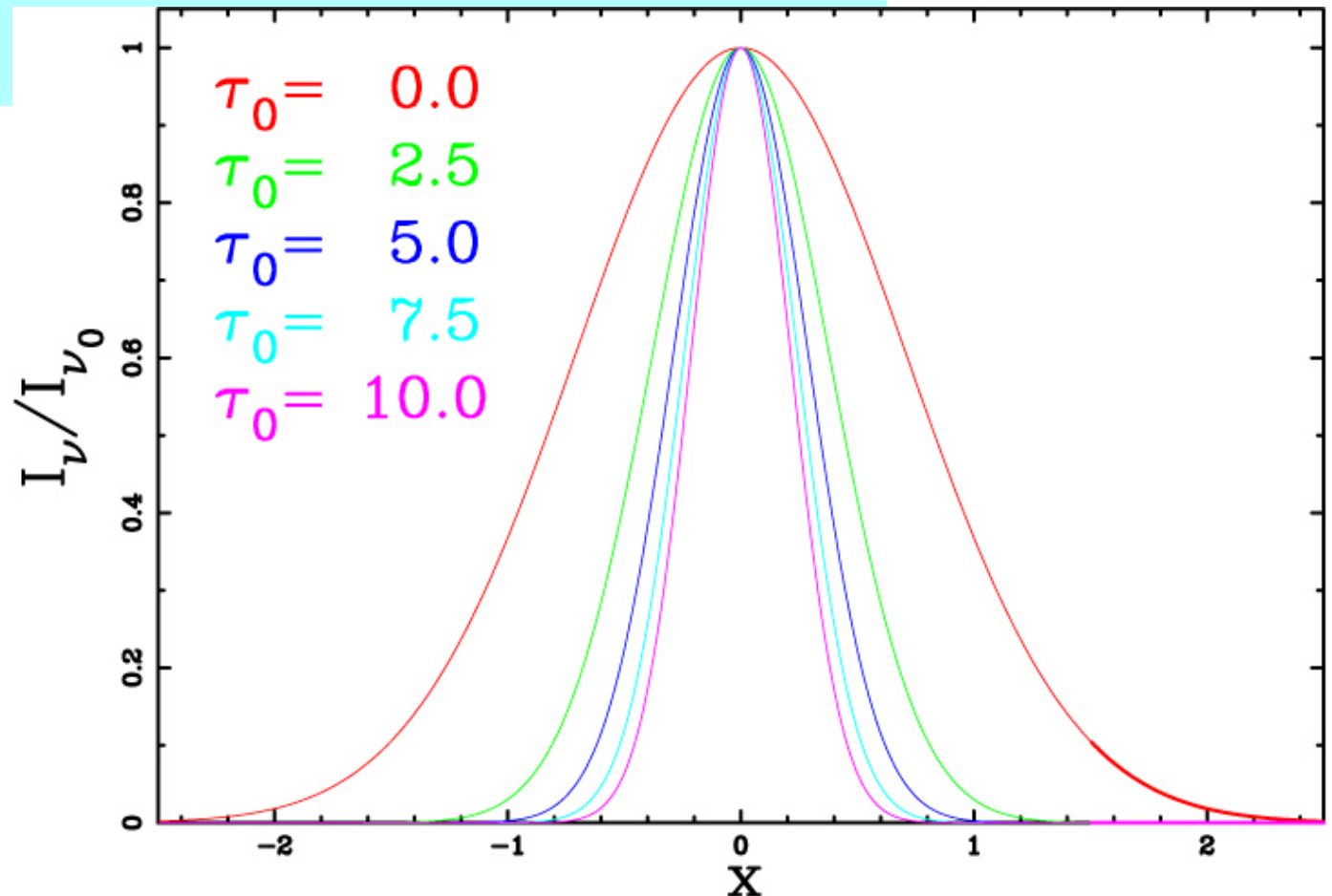
$$\Delta\nu = \frac{\Delta\nu_D}{\left(1/\delta_0^2 + \tau_0\right)^{1/2}}$$

## Intensity—line width relation

$$I_\nu \propto \exp(\tau_0) \exp(-x^2/\Delta\nu^2), \quad \ln I_\nu = \tau_0 - x^2/\Delta\nu^2 + \alpha$$

$$\therefore \Delta\nu \propto [\ln I_0]^{-1/2}$$

H<sub>2</sub>Oレーザーが励起される実際のガス温度は400—1,000K程度である。実際のスペクトルの線幅と見比べなさい。



# Line re-broadening

- メーザーが飽和状態になってきた場合:

$$I_\nu \propto \tau_\nu, \quad \tau_\nu = \frac{\tau_0}{1 + J_\nu/J_s}$$

- $J_\nu$ のプロファイルを仮定

$$J_\nu = J_0 \exp(-x^2/\delta^2), \quad \delta = \Delta\nu/\Delta\nu_D$$

$$I_\nu \propto \tau_\nu, \quad \tau_\nu \propto \frac{1}{1 + J_s/J_0 \exp(x^2/\delta^2)} \approx \frac{1}{1 + J_s/J_0} - \frac{J_s}{J_0} \frac{1}{(1 + J_s/J_0)^2} \frac{x^2}{\delta^2}$$

$$\tau_0 \approx \frac{1}{1 + J_s/J_0}, \quad \tau_0 - \tau_\nu \sim \frac{1}{2} \tau_0 \Rightarrow \Delta\nu = \frac{J_0}{2J_s} (1 + J_s/J_0) \Delta\nu_D = \left( \frac{J_0 + J_s}{2J_s} \right) \Delta\nu_D$$

- Line center から飽和状態になる
- スペクトルピークが平になってくる
- $J_\nu = J_s$ くらいで線幅が $\Delta\nu_D$ に戻る
- メーザー粒子数は変わらない: **飽和状態ではメーザー粒子 / 光子数の周波数方向への再分配がなされる**

# レーザー放射に対する幾何学的効果

- 増幅路が長い方向にレーザー増幅が強くなる
  - 不飽和レーザーでは鋭いビームになりやすい
- 異なる方向に進むレーザー放射が影響する
  - 不飽和レーザーでは影響は少ない  
(源泉関数  $S_0$  によってのみほぼ強度が決まるから)
  - 飽和レーザーでは影響が大きい  
(飽和によって 粒子数反転 に影響が出るから)  
どの方向からのレーザー放射によっても影響が与えられる

# 双方向に進む放射の間に成り立つ関係式

- Source function からの寄与を無視した場合

$$\frac{dl_v(+)}{dl} = \kappa_v I_v(+), \quad \frac{dl_v(-)}{-dl} = \kappa_v I_v(-)$$

$$\frac{d[I_v(+)]I_v(-)}{dl} = I_v(-) \frac{dl_v(+)}{dl} + I_v(+)^{-1} \frac{dl_v(-)}{dl} = 0, \quad \therefore I_v(+)^{-1} I_v(-) = \text{const}$$

片方向へ進む放射の強度が強くなると

その逆方向に進む放射の強度が弱められる

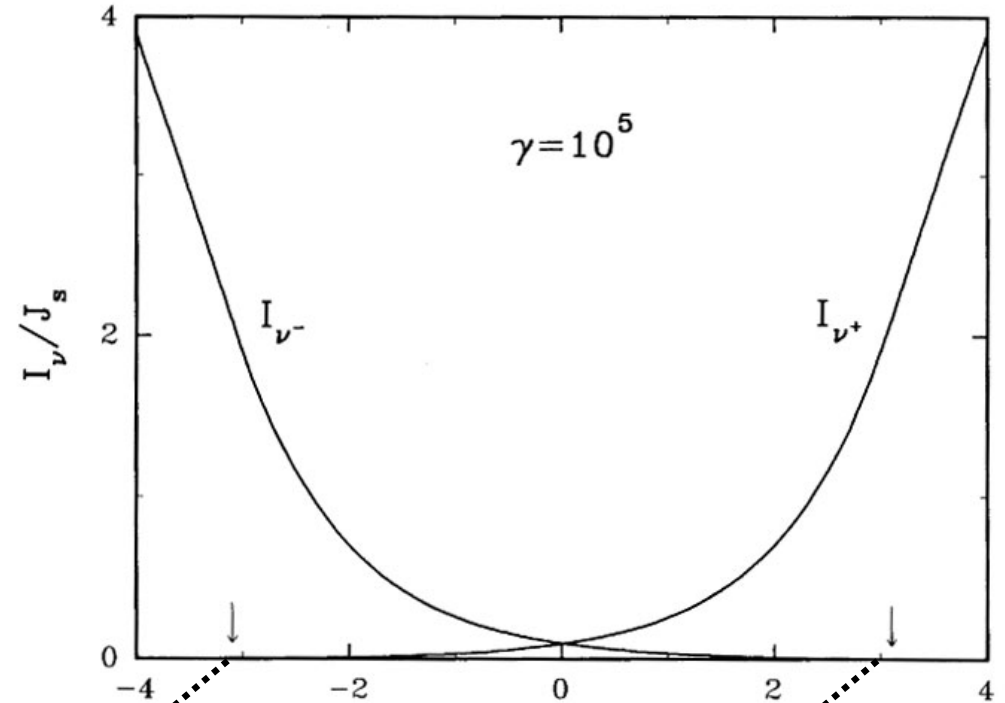
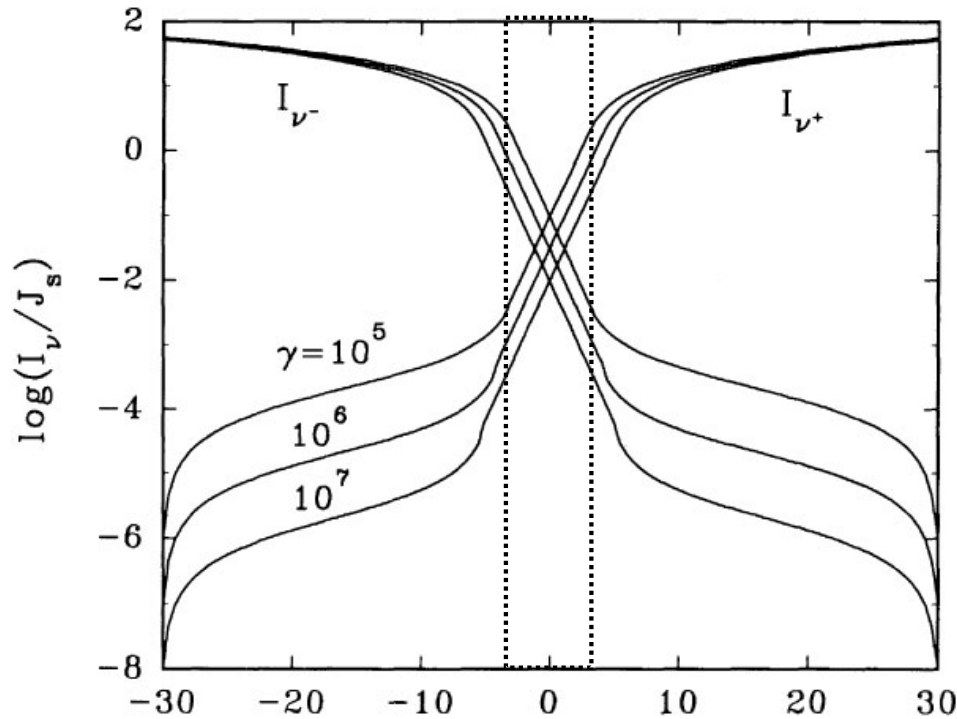
- 厳密解

$$\frac{dl_v}{\kappa_{0v} dl} = \frac{I_v}{1 + J_v/J_s} + S_m \quad \text{where } S_m = \frac{\epsilon_v}{\kappa_{0v}} \quad (\kappa_{0v} \text{ is negative})$$

$$\frac{d[I_v(+)]I_v(-)}{\kappa_{0v} dl} = S_m [I_v(-) - I_v(+)], \quad I_v(+)^{-1} I_v(-) = \int [I_v(-) - I_v(+)] S_m \kappa_{0v} dl$$

# Unsaturated core, saturated zone

$$\exp(2 \kappa_{0\nu} z_{s\nu}) = 2 \gamma$$



Elitzur  
1990

